Années d'utilisation :

Axe radical de deux cercles

On se place dans le plan $\mathcal{P}$ de la géométrie usuelle.

Dans ce problème $\mathcal{C},\mathcal{C}',\mathcal{C}''$ désignent des cercles. On convient de noter systématiquement Ω,Ω',Ω'' leurs centres et $R,R',R''>0$ leurs rayons respectifs.

Partie I-Puissance d'un point par rapport à un cercle

On appelle puissance d'un point M du plan pour un cercle $\mathcal{C}$ le réel $p_{\mathcal{C}}(M)=\Omega M^2-R^2$.

On remarque que le cercle $\mathcal{C}$ est la réunion des points M tels que $p_{\mathcal{C}}(M)=0$.

1. Une droite $\mathcal{D}$ issue d'un point M du plan coupe un cercle $\mathcal{C}$ en deux points A et B distincts.
   On note A' le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à A.
   Montrer que $\overline{MA}.\overline{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}=p_{\mathcal{C}}(M)$.

2. Soit $\mathcal{C}$ un cercle, M un point extérieur à ce cercle.
   On note T et S les points de contacts des tangentes à $\mathcal{C}$ issues de M.

2.a Comment peut-on construire à la règle et au compas les points T et S ?

2.b Montrer que $MT^2=MS^2=p_{\mathcal{C}}(M)$

3. Soit A,B,C,D quatre points distincts tels que les droites (AB) et (CD) ne soient pas parallèles.
   On note M le point de concours des droites (AB) et (CD).
   Montrer que les points A,B,C,D sont cocycliques si et seulement si $\overline{MA}.\overline{MB}=\overline{MC}.\overline{MD}$.

Partie II-Axe radical de deux cercles

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ désignent deux cercles non concentriques.

1. On note Δ l'ensemble des points M du plan tels que $p_{\mathcal{C}'}(M)=p_{\mathcal{C}}(M)$.

1.a On introduit I point milieu du segment $[\Omega,\Omega']$.
   Montrer qu'un point M appartient à Δ ssi $\overrightarrow{\Omega\Omega'}\cdot\overrightarrow{IM}=k$ avec k une constante à préciser.

1.b En déduire que Δ est une droite orthogonale à la droite $(\Omega\Omega')$.
   Cette droite est appelé axe radical des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

2. *Construction de l'axe radical dans le cas de cercles sécants :*

2.a On suppose les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sécants en deux points A et B distincts.
   Déterminer l'axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

2.b On suppose les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tangents en un point A.
   Déterminer l'axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

3. On se donne trois cercles $\mathcal{C},\mathcal{C}',\mathcal{C}''$ de centres Ω,Ω',Ω'' non alignés.
   On note Δ (resp. Δ',Δ'') les axes radicaux des cercles $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ (resp. $\mathcal{C}''$ et $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$)
   Justifier que Δ,Δ',Δ'' concourent en un point R.
   Ce point est appelé centre radical des cercles $\mathcal{C},\mathcal{C}',\mathcal{C}''$.

4. *Construction de l'axe radical dans le cas de cercles disjoints :*
   On suppose ici que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont disjoints.
   Donner une construction géométrique de l'axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ basée sur l'introduction d'un troisième cercle sécant à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.